ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 125 2019



DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136

УДК 517.977

# Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных

**Александр Александрович ШАБУРОВ**

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3174-9092, e-mail: alexandershaburov@mail.ru

# Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index depends on slow variables and smooth control constraints

**Alexander A. SHABUROV**

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin

19 Mira St., Ekaterinburg 620002, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3174-9092, e-mail: alexandershaburov@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, зависящим только от медленных переменных для линейной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, \end{cases}$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; $A_{ij}$, $B_i$, $i,j = 1,2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности. Существует единственный начальный вектор сопряженного состояния $l_\varepsilon$, определяющий вид оптимального управления. Доказано, что в случае конечного числа точек смены вида управления асимптотика вектора $l_\varepsilon$ имеет степенной характер.

**Ключевые слова:** оптимальное управление; сингулярно возмущенные задачи; асимптотические разложения; малый параметр

**Благодарности:** Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физ.-мат. наук, профессору Данилину Алексею Руфимовичу за постоянное внимание к работе.

**Для цитирования:** *Шабуров А. А.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 119–136. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136

**Abstract.** The paper deals with the problem of optimal control with a convex integral quality index depends on slow variables for a linear steady-state control system with a fast and slow variables in the class of piecewise continuous controls with a smooth control constraints

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1 u, & t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2 u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, & \end{cases}$$

where $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; $A_{ij}$, $B_i$, $i,j = 1,2$ — are constant matrices of the corresponding dimension, and $\varphi(\cdot)$ – is the strictly convex and cofinite function that is continuously differentiable in $\mathbb{R}^n$ in the sense of convex analysis. In the general case, Pontryagin's maximum principle is a necessary and sufficient optimum condition for the optimization of a such a problem. The initial vector of the conjugate state $l_\varepsilon$ is the unique vector, thus determining the optimal control. It is proven that in the case of a finite number of control switching points, the asymptotics of the vector $l_\varepsilon$ has the character of a power series.

**Keywords:** optimal control; singular perturbation problems; asymptotic expansions; small parameter

**Acknowledgements:** The author is very grateful to Prof. Alexey R. Danilin for the constant attention to the work.

**For citation:** Shaburov A. A. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya singulyarno vozmushchennoy zadachi optimal'nogo upravleniya s gladkimi ogranicheniyami na upravlenie i s integral'nym vypuklym kriteriem kachestva, terminal'naya chast' kotorogo zavisit tol'ko ot medlennyh peremennyh [Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index depends on slow variables and smooth control constraints]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 119–136. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями в связи с их теоретической значимостью и актуальными приложениями посвящаются многочисленные работы. Обзор результатов исследований задачи оптимального управления для линейной системы с быстрыми и медленными переменными в различной постановке представлен, например, в [1]. Более подробно общие свойства систем с интегральным выпуклым функционалом качества рассмотрены в [2, Глава 3]. Проблемы, связанные с предельной задачей, для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными рассматривались в [3], [4]. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления исследовалась в статьях [5]–[7]. Отметим, что в статье [6] рассматривался терминальный критерий качества.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотики вектора сопряженного состояния в задаче оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными, с интегральным выпуклым функционалом качества, терминальная часть которого зависит от медленных переменных. Считается, что на управление наложено гладкое геометрическое ограничение в виде шара. Получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление. Статья является продолжением работ [8], [9]. Главной отличительной особенностью изучаемой здесь задачи от задач, рассмотренных в статьях [8], [9], является более общий вид управляемой системы.

При написании работы использовались понятия, методы и результаты теории оптимального управления [2], [10], [11], асимптотического анализа [12], линейной алгебры [13], теории сингулярно возмущенных уравнений [14] и выпуклого анализа [15].

## 1. Постановка задачи

Пусть управляемая система содержит быстрые и медленные переменные, а терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, & \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; $A_{ij}$, $B_i$, $i,j = 1,2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа [15, § 13].

При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ управляемая система из (1.1) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u, \\ z_\varepsilon(0) = z^0, \end{cases}$$

где

$$z_\varepsilon(t) := \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_\varepsilon := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon := \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в рассматриваемом критерии качества $J$ первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени $T$, а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

Определение 1.1. Мы будем говорить, что пара матриц $(A, B)$ вполне управляема, если вполне управляема система $\dot{x} = Ax + Bu$.

Условие 1.1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, т. е. $rank\big(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{B}_\varepsilon, \ldots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1}\mathcal{B}_\varepsilon\big) = n + m$.

Условие 1.2. Все собственные значения матрицы $A_{22}$ имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, из условия 1.2 следует невырожденность матрицы $A_{22}$.

Определение 1.2. Вырожденной задачей для задачи (1.1) называется задача

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A_0x_0 + B_0u, \qquad t \in [0, T], \\ x_0(0) = x^0, \qquad \|u\| \leqslant 1, \\ J_0(u) := \varphi(x_0(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\, dt \to \min, \end{cases}$$

где $A_0 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $B_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$.

Условие 1.3. Пары $(A_0, B_0)$ и $(A_{22}, B_2)$ вполне управляемы.

Отметим, что выполнение условий 1.2 и 1.3 влечет выполнение условия 1.1 при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ [4, Theorem 1]. Таким образом, условия 1.2 и 1.3 являются достаточными условиями вполне управляемости двух систем: $\dot{x}_0 = A_0x_0 + B_0u$ и $\dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2u$ при всех достаточно малых $\varepsilon$.

Основная задача, которая ставится для (1.1), состоит в нахождении полного асимптотического разложения по степеням малого параметра $\varepsilon$ оптимального управления $u$, оптимального значения функционала качества $J_\varepsilon$ и оптимального процесса $(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))$.

## 2. Асимптотика матричной экспоненты и основные соотношения

Рассматривая $e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}$ как фундаментальную матрицу $\mathcal{W}(t,\varepsilon)$ решения системы в задаче (1.1) в случае $u_\varepsilon \equiv 0$ и следуя методу пограничных функций [14], при выполнении условия 1.2 получаем

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\mathcal{W}_k(t) + \tilde{\mathcal{W}}_k(\tau)\right), \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{W}_k(t) := \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11,k}(t) & \mathcal{W}_{12,k}(t) \\ \mathcal{W}_{21,k}(t) & \mathcal{W}_{22,k}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{W}}_k(\tau) := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{W}}_{11,k}(\tau) & \tilde{\mathcal{W}}_{12,k}(\tau) \\ \tilde{\mathcal{W}}_{21,k}(\tau) & \tilde{\mathcal{W}}_{22,k}(\tau) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathcal{W}_k(t)$, $\tilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$ — бесконечно дифференцируемые матричнозначные функции, которые могут быть получены из решения системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{W}(t,\varepsilon) = \mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{W}(t,\varepsilon), \\ \mathcal{W}(0,\varepsilon) = I, \end{cases} \tag{2.3}$$

где для блоков $\mathcal{W}_{ij}(t,\varepsilon)$ матрицы $\mathcal{W}(t,\varepsilon)$ получаем асимптотические разложения, равномерные на $[0,T]$ при каждом фиксированном $k \geqslant 0$. Через $I$ обозначаем тождественное отображение в соответствующем пространстве.

Непосредственным вычислением получаем начальные приближения при $k = 0$ :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{11,0}(t) = e^{A_0 t}, & \tilde{\mathcal{W}}_{11,0}(\tau) \equiv \mathcal{O}; \quad \mathcal{W}_{12,0}(t) \equiv \mathcal{O}, \ \ \tilde{\mathcal{W}}_{12,0}(\tau) \equiv \mathcal{O}; \\ \mathcal{W}_{21,0}(t) = -A_{22}^{-1} A_{21} e^{A_0 t}, & \tilde{\mathcal{W}}_{21,0}(\tau) = e^{A_{22}\tau} A_{22}^{-1} A_{21}; \quad \mathcal{W}_{22,0}(t) \equiv \mathcal{O}, \ \ \tilde{\mathcal{W}}_{22,0}(\tau) = e^{A_{22}\tau}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь и далее, $\mathcal{O}$ — нулевая матрица. При $k \geqslant 1$ и $j = 1,2$ с помощью рекуррентных формул

$$\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k}(\tau) = -\int\limits_{\tau}^{\infty} \Big( A_{11}\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k-1}(s) + A_{12}\tilde{\mathcal{W}}_{2j,k-1}(s) \Big)\, ds, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{W}_{1j,k}(t) = -e^{A_0 t}\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k}(0) + \int\limits_{0}^{t} e^{A_0(t-s)} A_{12} A_{22}^{-1} \frac{d}{ds} \left(\mathcal{W}_{2j,k-1}(s)\right) ds, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{W}_{2j,k}(t) = -A_{22}^{-1} \left( A_{21}\mathcal{W}_{1j,k}(t) - \frac{d}{dt} \left(\mathcal{W}_{2j,k-1}(t)\right) \right), \tag{2.7}$$

$$\tilde{\mathcal{W}}_{2j,k}(\tau) = -e^{A_{22}\tau}\mathcal{W}_{2j,k}(0) + \int\limits_{0}^{\tau} e^{A_{22}(\tau-s)} A_{21}\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k}(s) ds \tag{2.8}$$

находятся блоки-функции матриц (2.2). Таким образом, можно найти разложение матричной экспоненты (2.1) через матрицы-функции (2.2), элементы которых вычисляются с помощью начальных приближений (2.4), рекуррентных формул (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) и дополнительных условий на матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\mathcal{B}_\varepsilon$. Используя приведенные выше формулы, выпишем в явном виде матрицы-функции $\mathcal{W}_{12,1}(t)$, $\tilde{\mathcal{W}}_{12,1}(\tau)$, которые понадобятся в дальнейшем:

$$\mathcal{W}_{12,1}(t) = -e^{A_0 t} A_{12} A_{22}^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{W}}_{12,1}(\tau) = A_{12} A_{22}^{-1} e^{A_{22}\tau}.$$

**Утверждение 2.1.** *Существует $\gamma > 0$ такое, что*

$$\forall\, k \geqslant 0\, \forall\, i,j \in \{1,2\}\, \exists\, C_{ij,k} > 0\, \forall\, \tau \geqslant 0 \qquad \|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(\tau)\| \leqslant C_{ij,k} \cdot e^{-\gamma\tau}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Методом математической индукции по $k \geqslant 0$ покажем, что для некоторого $\gamma_1 > 0$ выполнено соотношение

$$\forall\, i,j \in \{1,2\}\, \exists\, P_{ij,k}(\tau)\, \forall\, \tau \geqslant 0 \qquad \|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(\tau)\| \leqslant P_{ij,k}(\tau) \cdot e^{-\gamma_1\tau}, \tag{2.10}$$

где $P_{ij,k}(\tau)$ — некоторые многочлены с неотрицательными коэффициентами. Из (2.10) будет следовать (2.9) с $\gamma = \gamma_1/2$.

Отметим, что при выполнении условия 1.2 существует $K > 0$ такое, что

$$\forall\, \tau \geqslant 0 \qquad \|e^{A_{22}\tau}\| \leqslant K e^{-\gamma_1 \tau},$$

где $\gamma_1 = -\frac{1}{2}\max\{Re(\lambda) : \lambda$ — собственное число матрицы $A_{22}\} > 0$ (см. например, [13, п. 8.5]).

База индукции очевидна ввиду явного вида (2.4) функции $\tilde{\mathcal{W}}_{ij,0}(\tau)$. Пусть для $k$ справедливо предложение индукции. Докажем, что оценка (2.10) справедлива и при $k+1$.

Для матрицы $\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k+1}$ в силу (2.5) имеем

$$\|\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k+1}(\tau)\| \leqslant \int\limits_{\tau}^{\infty} \Big(\|A_{11}\| \cdot \|\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k}(s)\| + \|A_{12}\| \cdot \|\tilde{\mathcal{W}}_{2j,k}(s)\|\Big)\, ds$$

$$\leqslant \int\limits_{\tau}^{\infty} \big(\|A_{11}\| \cdot P_{11,k}(s) \cdot e^{-\gamma_1 s} + \|A_{12}\| \cdot P_{21,k}(s) e^{-\gamma_1 s}\big)\, ds.$$

Определим $P(s) := \|A_{11}\| \cdot P_{11,k}(s) + \|A_{12}\| \cdot P_{21,k}(s)$ все коэффициенты которого, очевидно, неотрицательны. Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям $\tilde{k}$ раз ($\tilde{k}$ — степень многочлена $P(s)$):

$$\|\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k+1}(\tau)\| \leqslant C_{ij,k} \cdot \left( e^{-\gamma_1 s} P(s)\Big|_{\tau}^{\infty} + \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{-\gamma_1 s} P'(s) ds \right) \leqslant \ldots \leqslant \|\tilde{P}(\tau)\| \cdot e^{-\gamma_1 \tau} \leqslant e^{-\gamma \tau},$$

получим необходимую оценку.

В силу (2.8)

$$\|\tilde{\mathcal{W}}_{2j,k+1}(\tau)\| \leqslant e^{-\gamma_1 \tau} P_{21,k}(\tau) + \int\limits_{0}^{\tau} e^{-\gamma_1(\tau - s)} \cdot P_{21,k}(s) e^{-\gamma_1 s} ds$$

$$\leqslant e^{-\gamma \tau} P_{21,k}(\tau) + e^{-\gamma \tau} \cdot \int\limits_{0}^{\tau} P_{21,k}(s) ds \leqslant P(\tau) e^{-\gamma \tau}.$$

□

Отметим, что в силу утверждения 2.1 при всех $k$, $i$, $j$ и $t \in [\varepsilon^p, T]$, $p \in (0,1)$

$$\|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(t/\varepsilon)\| = \mathbb{O}, \tag{2.11}$$

т. е. величина $\|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(t/\varepsilon)\|$ есть асимптотический ноль относительно асимптотической последовательности по степеням $\varepsilon$.

При выполнении условия 1.1, принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое дает единственное решение задачи (1.1) [2, п. 3.5, теорема 14]. Тогда, как доказано в [8, Утверждение 1 и формулы (2.4), (2.5)] оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ в задаче (1.1) имеет вид:

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|\right)}, \qquad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2, \end{cases} \tag{2.12}$$

где

$$C_\varepsilon(t) := \left[\exp\left(t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2\end{pmatrix}\right]_1$$

$$= \mathcal{W}_{11}(t,\varepsilon)B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_{12}(t,\varepsilon)B_2. \tag{2.13}$$

Здесь $[\cdot]_1$ обозначает первые $n$ строк соответствующей матрицы. Вектор $l_\varepsilon$ есть единственное (с учетом кофинитности функции $\varphi$ — [15, Теорема 26.6]) решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi^*(-l) + \mathcal{W}_{11}(T,\varepsilon)x^0 + \mathcal{W}_{12}(T,\varepsilon)y^0 + \int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)l\|\right)}dt. \tag{2.14}$$

Здесь и далее $C_\varepsilon^*(t)$ — сопряженная матрица к матрице $C_\varepsilon(t)$. Тоже самое мы будем говорить про другие сопряженные матрицы при наличии над ними соответствующего обозначения.

Поскольку $\|e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* t}\| \leqslant K$ при $t \in [0,T]$, то $\|\left[\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* t}\right]_1\| = O(\varepsilon^{-1})$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.2.** *Пусть $l_\varepsilon$ — вектор, определяющий оптимальное управление, причем $l_{\varepsilon,N}$ определяется как*

$$\|l_\varepsilon - l_{\varepsilon,N}\| = O(\varepsilon^{N+1}).$$

*Тогда на отрезке $[0,T]$ выполнено*

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,N}\| = O(\varepsilon^N),$$

*где $u_\varepsilon$ — оптимальное управление, а $u_{\varepsilon,N}$ управление, определяемое по формуле (2.12) вектором $l_{\varepsilon,N}$ .*

В [8, Теорема 1] показано, что при выполнении условий 1.2 и 1.3:

$$l_\varepsilon \to l_0 \text{ при } \varepsilon \to +0, \tag{2.15}$$

где $l_0$ — единственное решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi^*(-l) + e^{A_0 T}x^0 + \int\limits_0^T \frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{S\left(\|C_0^*(t)l\|\right)}dt, \quad C_0(t) := e^{A_0 t}B_0. \tag{2.16}$$

Здесь $\varphi^*$ — функция, сопряженная к $\varphi$ в смысле выпуклого анализа (см. [15, § 12].

В силу (2.11) матриц-функции $\tilde{\mathcal{W}}_{ij}(T/\varepsilon,\varepsilon)$ при всех $i,j=1,2$ есть асимптотический ноль.

Отметим, что в силу аналитичности и вполне управляемости, у матрицы-функции $C_\varepsilon(t)$ существует лишь конечное число точек $t_{i,\varepsilon}$ таких, что при малых $\varepsilon>0$

$$\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2. \tag{2.17}$$

Оптимальное управление в силу (2.12) определяется одной из двух формул

$$\frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{2}, \qquad \text{либо} \qquad \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|}. \tag{2.18}$$

При этом интеграл из (2.14) разбивается на интегралы вида

$$\int \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt, \qquad \text{либо} \qquad \int \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{2}dt$$

по соответствующим отрезкам.

О п р е д е л е н и е 2.1. Точки $t_{i,\varepsilon}$ — решения уравнения (2.17) будем называть точками смены вида оптимального управления.

Таким образом, найдя асимптотику вектора $l_\varepsilon$, можно будет, используя асимптотическое разложение (2.1), найти асимптотику и точек $t_{i,\varepsilon}$, и оптимального управления. Следовательно, необходимо и важно исследовать решения уравнения (2.17).

Для дальнейшего нам потребуются асимптотические разложения $C_\varepsilon(t)$ до порядка $O(\varepsilon^2)$ и $\frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t)$ до порядка $O(\varepsilon)$. В силу (2.3) и (2.13)

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2 + M(\varepsilon,t,\tau) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon\to 0, \tag{2.19}$$

где

$$M(\varepsilon,t,\tau) := \varepsilon\left(\mathcal{W}_{11,1}(t) + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}A_{22}^{-1}A_{21}\right)B_1 + \varepsilon\left(\mathcal{W}_{12,2}(t) + \tilde{\mathcal{W}}_{12,2}(\tau)\right)B_2, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}C_0(t) + \varepsilon^{-1}A_{12}e^{A_{22}\tau}B_2 + A_{12}e^{A_{22}\tau}A_{22}^{-1}A_{21}B_1$$
$$+\left(A_{11}A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau} + A_{12}\tilde{\mathcal{W}}_{22,1}(\tau)\right)B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0. \tag{2.21}$$

Из формул (2.20), (2.21) следует, что при $t\in[\sqrt{\varepsilon},T]$

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}C_0(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0,$$

а при $t\in[0,\sqrt{\varepsilon}]$ переходя от функции $C_\varepsilon(t)$ к функции $\tilde{C}_\varepsilon(\tau) := C_\varepsilon(\varepsilon\tau)$, $\tau\in[0,1/\sqrt{\varepsilon}]$

$$\tilde{C}_\varepsilon(\tau) = B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2 + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{C}_\varepsilon(\tau) = A_{12}e^{A_{22}\tau}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0.$$

Таким образом, можно ожидать, что решения уравнения (2.17) при $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ находятся вблизи решений уравнения $\|C_0^*(t)l_0\| = 2$, т. е. вблизи точек смены вида управления в вырожденной задаче, а при $\tau \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ — вблизи решений уравнения

$$\|\psi^*(\tau)l_0\| = 2, \qquad \text{где} \qquad \psi^*(\tau) := B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*. \tag{2.22}$$

Аналогично [9, Теорема 1] доказывается следующая

**Теорема 2.1.** *Пусть* $l_\varepsilon \to l_0$, $\{t_i\}_1^p \subset [\sqrt{\varepsilon}, T]$ *— все решения уравнения* $\|C_0^*(t)l_0\| = 2$, *а* $\{\tau_j\}_1^q \subset [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ *— все решения уравнения* (2.22), *и выполнены условия*

$$\frac{d}{dt}\|C_0^*(t)l_0\|^2\bigg|_{t=t_i} = 2\Big\langle B_0^* e^{A_0^* t_i} l_0, B_0^* A_0^* e^{A_0^* t_i} l_0\Big\rangle \neq 0, \qquad \text{при} \qquad i = 1, \ldots, p,$$

$$\frac{d}{d\tau}\|\psi^*(\tau)l_0\|^2\bigg|_{\tau=\tau_j} = 2\Big\langle\big(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^*\tau_j}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*\big)l_0, B_2 e^{A_{22}^*\tau_j}A_{12}^* l_0\Big\rangle \neq 0, \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, q.$$

*Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *существуют* $\{t_{i,\varepsilon}\}_1^p \subset [\sqrt{\varepsilon}, T]$ *и* $\{\tau_{j,\varepsilon}\}_1^q \subset [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ *точки смены вида оптимального управления в задаче* (1.1). *Других точек смены вида управления нет, и при всех* $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ *справедливо*

$$t_{i,\varepsilon} \to t_i, \qquad \tau_{j,\varepsilon} \to \tau_j, \quad \varepsilon \to 0.$$

Определение 2.2. Решения уравнений $\|C_0^*(t)l_0\| = 2$ и (2.22), удовлетворяющие условиям теоремы 2.1, будем называть регулярными.

Наконец, отметим, что при нахождении асимптотических разложений интегралов от функций вида (2.18) по $\varepsilon > 0$ и малым компонентам вектора $(l_\varepsilon - l_0)$ подынтегральные выражения будут раскладываться в слагаемые с разномасштабными коэффициентами $f(t)g(t/\varepsilon)$. При этом такие слагаемые играют роль лишь тогда, когда нижний предел интегрирования имеет порядок $O(\varepsilon)$. Если оба предела имеют порядок $O(\varepsilon)$, то после замены $t = \varepsilon\tau$ получаются интегралы от $f(\varepsilon\tau)g(\tau)$. Но $\varepsilon\tau$ мало, поэтому $f(\varepsilon\tau)$ раскладывается в асимптотический ряд по $(\varepsilon\tau)$ с помощью разложения Тейлора функции $f$ в точке $t = 0$. В оставшемся случае асимптотика соответствующего интеграла находится следующим образом:

**Утверждение 2.3.** *Пусть* $f \in C[0, T]$ *— бесконечно дифференцируемая в нуле функция, а непрерывная на* $[0, +\infty)$ *функция* $g(\tau)$ *удовлетворяет неравенству* (2.9). *Тогда для любых* $\overline{\tau}, \overline{t} \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\varepsilon\overline{\tau}}^{\overline{t}} f(t)g(t/\varepsilon)\,dt \overset{as}{=} \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f^{(k)}(0)\int\limits_{\overline{\tau}}^{+\infty}\tau^k g(\tau)d\tau, \qquad \text{где} \qquad f(t) \overset{as}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)t^k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделав в интеграле замену переменной $\tau := t/\varepsilon$, получим

$$\int\limits_{\varepsilon\overline{\tau}}^{\overline{t}} f(t)g(t/\varepsilon)\,dt = \varepsilon\int\limits_{\overline{\tau}}^{\overline{t}/\varepsilon} f(\varepsilon\tau)g(\tau)d\tau = \varepsilon\int\limits_{\overline{\tau}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} f(\varepsilon\tau)g(\tau)d\tau + \mathbb{O}$$

$$= \varepsilon\int\limits_{\overline{\tau}}^{1/\sqrt{\varepsilon}}\left(\sum_{k=0}^{N} f(0)(\varepsilon\tau)^k + O\big((\varepsilon\tau)^{N+1}\big)\right)g(\tau)d\tau = \varepsilon\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k f(0)\int\limits_{\overline{\tau}}^{1/\sqrt{\varepsilon}}\tau^k\,g(\tau)d\tau + O\Big(\varepsilon^{(N+1)/2}\Big)$$

$$= \varepsilon\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k f(0)\left(\int\limits_{\overline{\tau}}^{+\infty}\tau^k\,g(\tau)d\tau + \mathbb{O}\right) + O\Big(\varepsilon^{(N+1)/2}\Big).$$

□

## 3. Асимптотическое разложение вектора $l_\varepsilon$

Пусть для вырожденной задачи и начального состояния системы $x^0$ существует единственный момент времени $t = t_0 \in (0,T)$ такой, что:

$$\begin{aligned} &\forall\, t < t_0\ \|C_0^*(t)l_0\| > 2, \quad \|C_0^*(t_0)l_0\| = 2,\\ &\forall\, t > t_0\ \|C_0^*(t)l_0\| < 2, \quad \tfrac{d}{dt}\|C_0^*(t)l_0\|^2\Big|_{t=t_0} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Например, если матрица системы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и матрица управления $\mathcal{B}_\varepsilon$ имеют вид

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha I & I \\ \mathcal{O} & -\varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \alpha < 0,$$

а $\|l_0\| > 2$ и $e^{\alpha T}\cdot\|l_0\| < 2$, то условие (3.1) выполняется, т. к. $\|C_0^*(t)l_0\| = e^{\alpha t}\cdot\|l_0\|$.

Как известно из [9], в этом случае интеграл в (2.16) разбивается на два интеграла

$$\int\limits_0^T \frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{S\left(\|C_0^*(t)l\|\right)}dt = \int\limits_0^{t_0}\frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{\|C_0^*(t)l\|}dt + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} C_0(t)C_0^*(t)l\,dt.$$

Отметим, что в силу сходимости (2.15) и асимптотической формулы (2.19) при всех $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ величина $\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|$ близка к $\|C_0^*(t)l_0\|$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Потребуем выполнения условия

$$\forall l_\varepsilon \to l_0\ \exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\ \forall t \in [0,\sqrt{\varepsilon}] \quad \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2. \tag{3.2}$$

**Утверждение 3.1.** *Если выполнены условия*

$$\forall\,\tau \geqslant 0\ \ \|\psi^*(\tau)l_0\| \neq 2, \tag{3.3}$$

$$\|\psi^*(0)l_0\| = \|B_1^*l_0\| > 2, \tag{3.4}$$

*то выполнено и условие* (3.2).

Доказательство данного утверждения почти дословно повторяет доказательство из [9]. □

Таким образом, при выполнении условий (3.1) и (3.2) в силу теоремы 2.1 у исходной задачи (1.1) при малых $\varepsilon > 0$ тоже лишь одна точка смены вида оптимального управления $t_\varepsilon$, т. е.

$$\forall t < t_\varepsilon \ \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2, \quad \|C_\varepsilon^*(t_\varepsilon)l_\varepsilon\| = 2, \quad \forall t > t_\varepsilon \ \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| < 2.$$

При этом $t_\varepsilon \to t_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Однако, существуют такие матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$, что хотя у вырожденной задачи имеется лишь одна точка смены вида оптимального управления $t_0$, у исходной задачи таких точек больше, за счет смены вида оптимального управления в точках отрезка $[0, \sqrt{\varepsilon}]$. Например, рассмотрим матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$ следующего вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -I & I \\ -\varepsilon^{-1}I & -\varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -0.5I \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}.$$

Тогда $C_0(t)l_0 = 0.5e^{-2t}l_0$, $\|\psi^*(\tau)\| = \left|0.5 - e^{-\tau}\right| \cdot \|l_0\|$. Поэтому, если $4 < \|l_0\| < 4e^T$, то у исходной задачи в силу теоремы 2.1 будут три точки смены вида оптимального управления, причем две их них лежат на $[0, \sqrt{\varepsilon}]$. Рассмотрим подробнее такой случай.

Условие 3.1. Пусть $t_1 = \varepsilon\tau_1$, $t_2 = \varepsilon\tau_2$, где $\tau_1$, $\tau_2$ — все решения уравнения (2.22), а $t_0$ единственное решение уравнения $\|C_\varepsilon^*(t)l_0\| = 2$, эти решения регулярны и выполнены условия (3.2), (3.4). Значит, условие (3.3) нарушается.

Таким образом, в рассматриваемом случае в силу теоремы 2.1 имеются ровно три точки смены вида оптимального управления $t_{1,\varepsilon} = \varepsilon\tau_{1,\varepsilon}$, $t_{2,\varepsilon} = \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}$ и $t_{0,\varepsilon}$, причем $\tau_{1,\varepsilon} \to \tau_1$, $\tau_{2,\varepsilon} \to \tau_2$ и $t_{0,\varepsilon} \to t_0$ при $\varepsilon \to 0$, а интеграл $\int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l\|)}dt$ разбивается в сумму четырех интегралов

$$\int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)l\|\right)}dt = \int\limits_0^{t_{1,\varepsilon}} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt + \frac{1}{2}\int\limits_{t_{1,\varepsilon}}^{t_{2,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l\,dt$$
$$+ \int\limits_{t_{2,\varepsilon}}^{t_{0,\varepsilon}} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt + \frac{1}{2}\int\limits_{t_{0,\varepsilon}}^{T} C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l\,dt. \tag{3.5}$$

Пусть $\Delta l_\varepsilon := l_\varepsilon - l_0$, $\Delta t_\varepsilon := t_{0,\varepsilon} - t_0$, $t_{1,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{1,\varepsilon}$, $\Delta\tau_{1,\varepsilon} := \tau_{1,\varepsilon} - \tau_1$, $t_{2,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}$, $\Delta\tau_{2,\varepsilon} := \tau_{2,\varepsilon} - \tau_2$. Тогда

$$\Delta l_\varepsilon = o(1), \quad \Delta t_\varepsilon = o(1), \quad \Delta\tau_{1,\varepsilon} = o(1), \quad \Delta\tau_{2,\varepsilon} = o(1) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{3.6}$$

и в силу формул (2.14), (2.16) и теоремы 2.1 величины $\Delta l_\varepsilon, \Delta\tau_{1,\varepsilon}, \Delta\tau_{2,\varepsilon}$ и $\Delta t_\varepsilon$, являются решением следующей системы уравнений, зависящей от параметра $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} 0 = F(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2) := -\nabla\varphi^*(-l) + \nabla\varphi^*(-l_0) + \varepsilon\mathcal{W}_{11,1}(T,\varepsilon)x^0 + \varepsilon\mathcal{W}_{12,1}(T,\varepsilon)y^0 \\ \quad + \int\limits_0^{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)}^{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)} C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l\,dt + \int\limits_{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)}^{t_0+\Delta t} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt \\ \quad + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0+\Delta t}^{T} C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l\,dt - \int\limits_0^{t_0} \frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{\|C_0^*(t)l\|}dt - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} C_0(t)C_0^*(t)l\,dt, \\ 0 = G_1(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_1) := \|C_\varepsilon^*(\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1))(l_0+\Delta l)\|^2 - 4, \\ 0 = G_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_2) := \|C_\varepsilon^*(\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2))(l_0+\Delta l)\|^2 - 4, \\ 0 = G_3(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) := \|C_\varepsilon^*(t_0+\Delta t)(l_0+\Delta l)\|^2 - \|C_0^*(t_0)l_0\|^2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Отметим, что функции $F$ и $G_i$ (при $i = 1, 2, 3$) непрерывны, а $G_i$ — бесконечно дифференцируемы. Рассмотрим их асимптотические разложения относительно бесконечно малых $\Delta l, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2$ и $\Delta t$.

В силу бесконечной дифференцируемости функции $\varphi^*$:

$$-\nabla\varphi^*(-l_0 - \Delta l) + \nabla\varphi^*(-l_0) \sim D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \sum_{k=2}^{\infty}\Phi_k(\Delta l), \tag{3.8}$$

где $D^2\varphi^*(-l_0)$ — дифференциал второго порядка от $\varphi^*$ в точке $(-l_0)$, а $\Phi_k(\Delta l)$ — однородные степени $k$ известные функции (многочлены от компонент вектора $\Delta l$).

Каждый из интегралов в (3.5), зависящий от $\varepsilon$, разобьем на части:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int\limits_0^{\varepsilon\tau_1} + \int\limits_{\varepsilon\tau_1}^{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)} := I_{1,1}(\varepsilon, \Delta l) + I_{1,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_1), \\ I_2 &:= \int\limits_{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)}^{\varepsilon\tau_1} + \int\limits_{\varepsilon\tau_1}^{\varepsilon\tau_2} + \int\limits_{\varepsilon\tau_2}^{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)} := I_{2,1}(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_1) + I_{2,2}(\varepsilon, \Delta l) + I_{2,3}(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_2), \\ I_3 &:= \int\limits_{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)}^{\varepsilon\tau_2} + \int\limits_{\varepsilon\tau_2}^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} := I_{3,1}(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_2) + I_{3,2}(\varepsilon, \Delta l) + I_{3,3}(\varepsilon, \Delta l, \Delta t), \\ I_4 &:= \int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{T} := I_{4,1}(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) + I_{4,2}(\varepsilon, \Delta l). \end{aligned}$$

Отметим, что для разложения интегралов $I_{1,2}$, $I_{2,1}$, $I_{2,3}$, $I_{3,1}$, $I_{3,3}$ и $I_{4,1}$ надо (для интегралов $I_{1,2}$, $I_{2,1}$, $I_{2,3}$ и $I_{3,1}$ — после замены переменной $t = \varepsilon\tau$) ) разложить коэффициенты, зависящие от времени, в ряды Тейлора в окрестности точек $\tau_1, \tau_2$ и $t_0$, соответственно. При этом, в силу ограниченности подынтегральных выражений $I_1 = O(\varepsilon)$

и $I_2 = O(\varepsilon)$, а в силу утверждения 2.3 в асимптотическом разложении все слагаемые с множителями, зависящими от $t/\varepsilon$, тоже будут иметь порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Наконец, в силу того, что слагаемое первого порядка малости по $\Delta t$ в $I_{3,3}$ равно

$$\frac{C_0(t_0)C_0^*(t_0)l_0}{\|C_0^*(t_0)l_0\|}\,\Delta t,$$

а в $I_{4,1}$ равно

$$-\frac{C_0(t_0)C_0^*(t_0)l_0}{2}\,\Delta t,$$

и $\|C_0^*(t_0)l_0\| = 2$, то в разложении суммы $I_{3,3}+I_{4,1}$ слагаемых первого порядка малости по $\Delta t$ не будет.

Обозначим линейную часть по $\triangle l$ функции $F$ как $\mathcal{F}(\Delta l)$. В силу (3.8) непосредственным вычислением получаем первое приближение функции $F(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2)$ при стремлении ее аргументов к нулю

$$\begin{aligned}
&F(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \Delta t) = D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l \\
&+ \int\limits_0^{t_0} C_0(t)\frac{C_0^*(t)\triangle l\|C_0^*(t)l_0\|^2 - \langle C_0^*(t)\triangle l, C_0^*(t)l_0\rangle C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}dt \\
&+ \int\limits_{t_0}^{T} \frac{C_0(t)C_0^*(t)\triangle l}{2}dt + \varepsilon f_1 + F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2) \;=: \\
&\mathcal{F}(\Delta l) + \varepsilon f_1 + F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned}
&f_1 = \mathcal{W}_{11,1}(T)x^0 + \mathcal{W}_{12,1}(T)y^0 \\
&+ \int\limits_0^{\tau_1} \frac{\left(B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2\right)\left(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*\right)l_0}{\|\left(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*\right)l_0\|}\,d\tau \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left(B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2\right)\left(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*\right)l_0\,d\tau \\
&+ \int\limits_{\tau_2}^{\infty} \frac{\left(B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2\right)\left(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*\right)l_0}{\|\left(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*\right)l_0\|}\,d\tau, \\
&F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2) = O\Big(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta t)^2 + (\Delta\tau_1)^2 + (\Delta\tau_2)^2\Big).
\end{aligned}$$

Аналогично для функций $G_i$ получим

$$\begin{aligned} G_1(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_1) &= 2\langle\psi^*(\tau_1)l_0,\psi^*(\tau_1)\Delta l + B_2^* e^{A_{22}^*\tau_1}A_{12}^*\Delta\tau_1 l_0 + \varepsilon B_1^*\mathcal{W}_{11,1}^*(0),l_0\rangle \\ &\quad +2\langle\psi^*(\tau_1)l_0,\varepsilon B_1^* A_{21}^*(A_{22}^{-1})^* e^{A_{22}^*\tau_1}(A_{22}^{-1})^* A_{12}^* l_0\rangle + G_{1,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_1), \\ G_2(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_2) &= 2\langle\psi^*(\tau_2)l_0,\psi^*(\tau_2)\Delta l + B_2^* e^{A_{22}^*\tau_2}A_{12}^*\Delta\tau_2 l_0 + \varepsilon B_1^*\mathcal{W}_{11,1}^*(0),l_0\rangle \\ &\quad +2\langle\psi^*(\tau_2)l_0,\varepsilon B_1^* A_{21}^*(A_{22}^{-1})^* e^{A_{22}^*\tau_2}(A_{22}^{-1})^* A_{12}^* l_0\rangle + G_{2,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_2), \\ G_3(\varepsilon,\Delta l,\Delta t) &= 2\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)\Delta l + \frac{\partial}{\partial t}C_0^*(t_0)l_0\Delta t\rangle \\ &\quad +2\langle C_0^*(t_0)l_0,\varepsilon B_1^*\mathcal{W}_{11,1}^*(t_0)+\varepsilon B_2^*\mathcal{W}_{12,2}^*(t_0)\rangle + G_{3,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta t), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$G_{1,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_1) = O\Big(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta\tau_1)^2\Big),$$

$$G_{2,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_2) = O\Big(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta\tau_2)^2\Big),$$

$$G_{3,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta t) = O\Big(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta t)^2\Big).$$

В силу (3.9) и (3.10) система первого приближения для (3.7) распадается на четыре уравнения, используя линейную часть по $\triangle l$ функций $G_i$ как $\mathcal{G}_i(\Delta l)$ при $i=1,2,3$ :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\Delta l_1) = -\varepsilon f_1, \\ \mathcal{G}_1(\Delta l_1,\Delta\tau_{1,1}) := 2\langle\psi^*(\tau_1)l_0,\psi^*(\tau_1)\Delta l_1\rangle + 2\Delta\tau_{1,1}\langle\psi^*(\tau_1)l_0, B_2^* e^{A_{22}^*\tau_1}A_{12}^* l_0\rangle = \varepsilon g_{1,1}, \\ \mathcal{G}_2(\Delta l_1,\Delta\tau_{2,1}) := 2\langle\psi^*(\tau_2)l_0,\psi^*(\tau_2)\Delta l_1\rangle + 2\Delta\tau_{2,1}\langle\psi^*(\tau_2)l_0, B_2^* e^{A_{22}^*\tau_2}A_{12}^* l_0\rangle = \varepsilon g_{2,1}, \\ \mathcal{G}_3(\Delta l_1,\Delta t_1) := 2\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)\Delta l_1\rangle + 2\Delta t_1\langle C_0^*(t_0)A_0^* l_0, \dfrac{\partial}{\partial t}C_0^*(t_0)l_0\rangle = \varepsilon g_{3,1}, \end{cases} \tag{3.11}$$

где $g_{i,1}$ , $i=1,2,3$ — известные величины (см. (3.10)).

В силу условий на функцию $\varphi$ линейный оператор $D^2\varphi^*(-l_0)$ положительный, а в силу неравенства Коши–Буняковского остальные слагаемые в определении линейного оператора $\mathcal{F}$ неотрицательны. Поэтому $\mathcal{F}>0$ и, тем самым, из первого уравнения в (3.11) однозначно находится $\Delta l_1 = \varepsilon\mathcal{F}^{-1}(-f_1) =: \varepsilon l_1$.

Поскольку в силу (3.1) при $j=1,2$ : $\langle\psi^*(\tau_j)l_0, B_2^* e^{A_{22}^*\tau_j}A_{12}^* l_0\rangle \neq 0,$ то из второго и третьего уравнений в (3.11) по $\Delta l_1$ однозначно находятся $\Delta\tau_{1,1} = \varepsilon\tau_1, \Delta\tau_{2,1} = \varepsilon\tau_2$ .

Поскольку в силу (3.1) $\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)A_0^* l_0\rangle \neq 0,$ то из четвертого уравнения в (3.11) по $\Delta l_1$ однозначно определяется $\Delta t_1 = \varepsilon t_1$ .

Далее процесс нахождения следующих членов разложения $\Delta l, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2$ и $\Delta t$ продолжается стандартным образом.

Пусть найдены приближения $\Delta l$, $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$ и $\Delta t$ до $N$-го порядка. Тогда величины

$$\begin{aligned} &\Delta l_{N+1} := \Delta l_\varepsilon - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k l_k, \quad \Delta\tau_{1,N+1} := \Delta\tau_{1,\varepsilon} - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \tau_{1,k}, \\ &\Delta\tau_{2,N+1} := \Delta\tau_{2,\varepsilon} - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \tau_{2,k}, \quad \Delta t_{N+1} := \Delta t_\varepsilon - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k t_k, \end{aligned} \tag{3.12}$$

по построению удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\Delta l_{N+1}) = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|r_{N+1}\|\big) + O\big(\|r_{N+1}\|^2\big), \\ \mathcal{G}_1(\Delta l_{N+1}, \Delta\tau_{1,N+1}) = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|r_{N+1}\|\big) + O\big(\|r_{N+1}\|^2\big), \\ \mathcal{G}_2(\Delta l_{N+1}, \Delta\tau_{2,N+1}) = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|r_{N+1}\|\big) + O\big(\|r_{N+1}\|^2\big), \\ \mathcal{G}_3(\Delta l_{N+1}, \Delta t_{N+1}) = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|r_{N+1}\|\big) + O\big(\|r_{N+1}\|^2\big), \end{cases} \tag{3.13}$$

где $r^*_{N+1} := \big(\Delta l^*_{N+1}, \Delta\tau^*_{1,N+1}, \Delta\tau^*_{2,N+1}, \Delta t^*_{N+1}\big)$.

В силу непрерывной обратимости оператора $\big(\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*_1, \mathcal{G}^*_2, \mathcal{G}^*_3\big)$ из (3.13) получим

$$r_{N+1} = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|r_{N+1}\|\big) + O\big(\|r_{N+1}\|^2\big). \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.6), (3.12), (3.14) на основании [9, Утверждение 2] следует, что $r_{N+1} = O\big(\varepsilon^{N+1}\big)$. Тем самым, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия 1.2, 1.3, 3.1 и предположение* (3.1). *Тогда вектор $l_\varepsilon$ и моменты времени $t_{i,\varepsilon}$, $i = 0, 1, 2$ раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{0,\varepsilon} \overset{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_k, \quad t_{1,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{1,\varepsilon} \overset{as}{=} \varepsilon\tau_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{1,k},$$

$$t_{2,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{2,\varepsilon} \overset{as}{=} \varepsilon\tau_2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{2,k}, \quad \varepsilon \to 0,$$

*коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.*

При выполнении условия (3.1) возможен случай, когда на $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ для исходной задачи "появляется" одна точка смены вида оптимального управления. Например, если

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -I & I \\ \mathcal{O} & -\varepsilon^{-1} I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1} I \end{pmatrix},$$

то $A_0 = -I$, $B_0 = I$, $C_0(t) = e^{-t}$, $\|C^*_0(t) l_0\| = e^{-t}\|l_0\|$, $\psi^*(\tau) \overset{(2.22)}{=} (1-e^{-t})I$, $\|\psi^*(\tau) l_0\| = \|(1 - e^{-t})\| \cdot \|l_0\|$ и $\|\psi(0) l_0\| = 0$. Поэтому, если $\|l_0\| > 2$ и $e^T\|l_0\| < 2$, то на отрезке $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ существует единственный корень $\tau_1 = \ln \frac{\|l_0\|}{\|l_0\| - 2}$ уравнения (2.22).

Рассмотрим подробнее такой случай.

Условие 3.2. Пусть $t_1 = \varepsilon\tau_1$, где $\tau_1$ — все решения уравнения (2.22), а $t_0$ — единственное решение уравнения $\|C_\varepsilon^*(t)l_0\| = 2$, эти решения регулярны и выполнены условия (3.2), (3.4). Значит, условие (3.3) нарушается.

Таким образом, в рассматриваемом случае в силу теоремы 2.1 имеются ровно две точки смены вида оптимального управления $t_{1,\varepsilon} = \varepsilon\tau_{1,\varepsilon}$ и $t_{0,\varepsilon}$, причем $\tau_{1,\varepsilon} \to \tau_1$ и $t_{0,\varepsilon} \to t_0$ при $\varepsilon \to 0$, а интеграл $\int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l\|)}dt$ разбивается в сумму трех интегралов

$$\int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)l\|\right)}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_{1,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l\,dt + \int\limits_{t_{1,\varepsilon}}^{t_{0,\varepsilon}} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt + \frac{1}{2}\int\limits_{t_{0,\varepsilon}}^T C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l\,dt.$$

В этом случае в аналоге системы (3.7) будет три уравнения, а линейный оператор $\mathcal{F}$ будет строго положительным и иметь вид

$$\mathcal{F}(\Delta l) = D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^T C_0(t)C_0^*(t)\Delta l\,dt +$$

$$+\int\limits_0^{t_0} C_0(t)\frac{C_0^*(t)\triangle l\|C_0^*(t)l_0\|^2 - \langle C_0^*(t)\triangle l, C_0^*(t)l_0\rangle C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}dt$$

и справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнены условия 1.2, 1.3, 3.2 и предположение* (3.1)*. Тогда вектор $l_\varepsilon$ и моменты времени $t_{i,\varepsilon}$, $i = 0, 1$ раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k l_k, \quad t_{0,\varepsilon} \overset{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k t_k, \quad t_{1,\varepsilon} = \varepsilon\tau_{1,\varepsilon} \overset{as}{=} \varepsilon\tau_1 + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\tau_{1,k},$$

*коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.*

В общем случае справедлива итоговая теорема.

**Теорема 3.3.** *Пусть выполнены условия 1.2, 1.3 и условия теоремы 2.1. Тогда вектор $l_\varepsilon$ и моменты времени $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \ldots, t_{p,\varepsilon}\}$, $\{\varepsilon\tau_{1,\varepsilon}, \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}, \ldots, \varepsilon\tau_{q,\varepsilon}\}$ раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k l_k, \quad t_{i,\varepsilon} \overset{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k t_{i,k}, \quad \text{при } i = 1, \ldots, p,$$

$$\varepsilon\tau_{j,\varepsilon} \overset{as}{=} \varepsilon\tau_j + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\tau_{j,k}, \quad \text{при } j = 1, \ldots, q,\ \varepsilon \to 0,$$

*коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.*

## Список литературы


[1] А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев, “Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал.*, **20** (1982), 3–77.

[2] Э. Б. Ли, Л. Маркус, *Основы теории оптимального управления*, Наука, М., 1972.

[3] А. Дончев, *Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности*, Мир, М., 1987.

[4] P. V. Kokotovic, A. H. Haddad, “Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models”, *IEEE Trans. Automat. Control.*, **20**:1 (1975), 111–113.

[5] А. Р. Данилин, О. О. Коврижных, “О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления”, *Докл. РАН*, **451**:6 (2013), 612-614.

[6] А. Р. Данилин, Ю. В. Парышева, “Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **13**:2 (2007), 55–65.

[7] А. И. Калинин, К. В. Семёнов, “Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:3 (2004), 432–443.

[8] А. А. Шабуров, “Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ с интегральным выпуклым критерием качества”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **23**:2 (2017), 303–310.

[9] А. А. Шабуров, “Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **24**:2 (2018), 280–289.

[10] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением. Линейные системы*, Наука, М., 1968.

[11] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М., 1961.

[12] А. М. Ильин, А. Р. Данилин, *Асимптотические методы в анализе*, Физматлит, М., 2009, 248 с.

[13] С. К. Годунов, *Современные аспекты линейной алгебры*, Научная книга, Новосибирск, 1997.

[14] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973.

[15] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.


## References


[1] A. B. Vasil'eva, M. G. Dmitriev, “Singular perturbations in optimal control problems”, *J. Soviet Math.*, **34**:3 (1986), 1579–1629.

[2] E. B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1967 (In Russian).

[3] A. L. Dontchev, *Perturbations, approximations and sensitivity analysis of optimal control systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1987.

[4] P. V. Kokotovic, A. H. Haddad, “Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models”, *IEEE Trans. Automat. Control.*, **20**:1 (1975), 111–113.

[5] A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh, “Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance”, *Doklady Mathematics*, **88**:1 (2013), 465-467.

[6] A. R. Danilin, Yu. V. Parysheva, “The asymptotics of the optimal value of the performance functional in a linear optimal control problem in the regular case”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **259**:2 (2007), S83–S94.

[7] A. I. Kalinin, K. V. Semenov, “The asymptotic optimization method for linear singularly perturbed systems with the multidimensional control”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**:3 (2004), 407–417.

[8] A. A. Shaburov, “Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem in the space $\mathbb{R}^n$ with an integral convex performance index”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **23**:2 (2017), 303–310 (In Russian).

[9] A. A. Shaburov, “Asymptotic expansion of a solution to a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral performance index whose terminal part depends on slow variables only”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **24**:2 (2018), 280–289 (In Russian).

[10] N. N. Krasovskii, *Theory of Motion Control. Linear Systems*, Nauka, Moscow, 1968 (In Russian).

[11] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1962.

[12] A. M. Ilin, A. R. Danilin, *Asymptotic Methods in Analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2009 (In Russian).

[13] S. K. Godynov, *Modern Aspects of Linear Algebra*, RIMIBE NSU, Novosibirsk, 1998.

[14] A. B. Vasilieva, V. F. Butuzov, *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations*, Nauka, Moskow, 1973 (In Russian).

[15] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

### Информация об авторе

**Шабуров Александр Александрович**, аспирант, кафедра математического анализа института естественных наук и математики. Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: alexandershaburov@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-3174-9092

Поступила в редакцию 17.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.
Принята к публикации 14.03.2019 г.

### Information about the author

**Alexander A. Shaburov**, Post-Graduate Student, Mathematical Analysis Department of the Institute of Natural Sciences and Mathematics. Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation. E-mail: alexandershaburov@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-3174-9092

Received 17 January 2019
Reviewed 11 February 2019
Accepted for press 14 March 2019